

Kalman 滤波质量控制的一种改进算法^{*}

柴艳菊 欧吉坤

中国科学院测量与地球物理研究所, 动力大地测量学开放研究实验室, 武汉 430077

摘要 探讨了 Kalman 滤波中观测粗差和状态方程异常的处理问题, 分析了以往处理方法, 如 Sage 自适应滤波法、两步假设检验法及抗差自适应 Kalman 滤波法等的特点和不足, 提出一种改进算法, 一方面用拟准检定法检测观测方程中的粗差, 另一方面再用 Sage 自适应方法实时估计状态噪声方差阵, 减免状态方程异常对参数估计的影响. 通过一个星载 GPS 低轨卫星定轨算例, 验证这种思路是可行的.

关键词 Kalman 滤波 Sage 自适应估计 拟准检定法 抗差估计

Kalman 滤波是目前动态数据处理常用的方法之一, 已在工程变形和地壳形变检测, 特别是 GPS 定位定轨等方面得到了广泛应用. 但是该方法的估计结果只有在系统模型准确且观测噪声和动态噪声均为白噪声的情况下才具有方差最小且无偏的特性, 这就要求对物体的运动了解比较清楚, 这一般是很难做到的^[1,2]. 由于载体的运动非常复杂, 观测粗差和状态异常经常存在, 如果这些问题解决不好, 不仅得不到准确的结果, 而且可能出现滤波结果发散. 如何克服它们对参数估计的干扰一直是一个比较棘手的问题, 也是目前的研究热点.

以往的解决方法一般采用自适应 Kalman 滤波算法, 如模型方差自适应补偿法, Sage 自适应滤波法^[3,4], 衰减自适应估计法等^[5]. 许多文献已指出, 这些方法并不能达到减免模型误差的目的^[4]. 近年来, 测量界的一些学者将假设检验法拓展到 Kalman 滤波中^[6,1]用于判断系统模型是否存在异常. 但是该方法不能区分估计偏差是由观测粗差引起的还是由状态异常引起的. 陶本藻曾提出两步检验法^[2],

首先对滤波模型进行整体检验, 如果检验失败, 再对观测模型和状态模型分别检验, 定位观测粗差和状态异常并进行消除或补偿. 这种方法的思路是可取的, 但是大量的实践证明, 假设检验方法检测多个异常的效果不好^[2].

近几年, 许多学者又提出了多种抗差自适应 Kalman 滤波算法^[4,7], 首先利用抗差估计将观测粗差定位并对含粗差的观测方差进行修正, 再利用修正后的观测方程自适应控制状态方差阵. 已有结果表明, 这些方法比经典滤波和统计检验方法有了较大的改进, 效果也比较明显. 但是抗差估计对观测结构比较差的情况存在粗差的转移和淹没问题; 目前选取合适的抗差权因子还比较困难.

在分析以往方法的优点和不足的基础上, 本文将拟准检定法^[8]拓展应用到 Kalman 滤波中. 由于拟准检定法是直接以观测值真误差为研究对象, 通过附加拟准观测范数极小的条件来求解真误差估值, 与假设检验法和一般抗差估计方法相比具有定位粗差准确、可靠的优点^[8,2], 尤其能克服因系统

2003-11-12 收稿, 2004-02-05 收修改稿

^{*} 国家自然科学基金资助项目(批准号: 40204001, 40074003)

E-mail: cyjigg@sina.com

1) Gang Lu, Quality Control for Differential Kinematic GPS Positioning, UCGE reports, No. 20042, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, 1991, 4~21

2) 柴艳菊, 拟准检定法的理论、应用及程序设计, 中国科学院测量与地球物理研究所硕士学位论文, 武汉, 2002

结果较差而出现的粗差转移和淹没问题. 本文提出一种改进算法, 一方面用拟准检定法检测出观测粗差并对相应观测进行修正, 另一方面用准确的观测方程, 结合 Sage 自适应 UD 滤波估计状态噪声的协方差阵, 减免状态异常影响, 提高参数解的准确性. 最后通过一个星载 GPS 低轨卫星定轨算例, 简单介绍了这种方法的计算步骤, 验证该思路的可行性.

1 Kalman 波模型

不失一般性, 取星载低轨卫星的三维位置及其各方向的速度、加速度为状态向量, 即: $X_k = (X \ Y \ Z \ \dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z})_k^T$, Kalman 滤波模型为

状态方程:

$$X_k = \phi_{k, k-1} X_{k-1} + \omega_{k-1}, \quad (1)$$

观测方程:

$$L_k = A_k X_k + v_k, \quad (2)$$

$$\phi_{k, k-1} = \begin{pmatrix} E & \Delta t E & \frac{1}{2} \Delta t^2 E \\ O & E & \Delta t E \\ O & O & E \end{pmatrix} \text{ 为一步状态转移矩阵,}$$

其中 E 为三阶单位阵, Δt 为观测时间间隔, L_k 为第 k 历元观测向量, $A_k = (H_k \ O \ O)$ 为系数阵, 其中 H_k 为 X, Y, Z 对应的系数阵, O 为零矩阵, ω_{k-1}, v_k 为状态噪声和观测噪声, 假定其统计特性为:

$$\begin{aligned} E(\omega_k) &= 0, E(v_k) = 0, E(\omega_k \omega_j^T) = Q_k \delta_{kj}, \\ E(v_k v_j^T) &= R_k \delta_{kj}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 Q_k, R_k 分别为各历元的动态噪声和观测噪声协方差阵, δ_{kj} 为 Kronecker 函数. 如果已知初始时刻状态向量 \hat{X}_0 及其协方差阵 Σ_0 且 $\hat{X}_{0,0}$ 与 ω_{k-1}, v_k 不相关, 利用最小方差准则, 得到滤波递推方程为:

状态预测为

$$\hat{X}_{k, k-1} = \Phi_{k, k-1} \hat{X}_{k-1};$$

预报误差的方差阵为

$$\Sigma_{k, k-1} = \Phi_{k, k-1} \Sigma_{k-1} \Phi_{k, k-1}^T + Q_{k-1};$$

增益矩阵为

$$K_k = \Sigma_{k, k-1} A_k^T (A_k \Sigma_{k, k-1} A_k^T + R_k)^{-1};$$

状态更新为

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k, k-1} + K_k (L_k - A_k \hat{X}_{k, k-1});$$

滤波误差的方差阵为

$$\Sigma_k = (I - K_k A_k) \Sigma_{k, k-1} (I - K_k A_k)^T + K_k R_k K_k^T.$$

因为 Kalman 滤波值 \hat{X}_k 是 X_k 的线性最小方差估计, 由投影性质易知 \hat{X}_k 是 X_k 的无偏估计^[9]. 但是当状态方程有异常和观测方程有粗差时, 统计特性已不满足公式(3)的条件, 此时利用上述公式推导的 \hat{X}_k 已不具有无偏估计的性质, 甚至出现发散现象^[1]. 为了克服滤波发散, 经典方法是利用自适应 Kalman 滤波算法实时估计 Q_k 和 R_k 矩阵. 目前, 测量界一般采用两步假设检验法或抗差自适应滤波法来控制滤波方程中的异常, 取得了较好效果^[4, 6, 7, 11]. 针对现有方法存在的不足, 本文提出拟准检定法+Sage 自适应 UD 滤波的新方法.

2 拟准检定法+Sage 自适应 UD 滤波模型

2.1 用拟准检定法检测观测方程中的粗差¹⁾

当观测值中存在粗差时, 系统的观测方程(2)可写成: $\check{V}_k = H_k \check{X}_k + C_b \Delta_k + v_k$, 式中, \check{X}_k 为三维位置参数, C_b 为粗差系数阵, Δ_k 为粗差向量. 首先由观测方程求得残差为:

$$\check{V}_k = -M_k \check{L}_k, \quad (4)$$

式中 $M_k = I_k - H_k (H_k^T P_k H_k)^{-1} H_k^T P_k$ 为平差因子阵, I_k 为单位阵, $P_k = \sigma_0^2 R_k^{-1}$.

初选拟准观测: 首先根据残差 \check{V}_k 初选拟准观测. 初选 $|\check{V}_{ki}|$ 较小的 $r (r > 3)$ 个观测作为拟准观测, 通过附加拟准观测范数极小的条件求得第 k 历元观测值真误差估值为^[8, 11]:

1) 见第 904 页脚注 2)
 ©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\hat{\Delta}_k = -(M_k^T M_k + P_Q G_Q^T G_Q P_Q)^{-1} M_k^T M_k \check{L}_k, \quad (5)$$

其中 $G_Q = (0 \ (H_k)_{3r}^T)$, $(H_k)_r^T$ 为第 k 历元系数阵 H_k 的转置矩阵对应于拟准观测的分块矩阵, $P_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (P_k)_r \end{bmatrix}$, $(P_k)_r$ 为拟准观测对应的权阵.

复选拟准观测: 复选拟准观测根据真误差估值 $\hat{\Delta}_k$ 的分群情况, 如果初选的拟准观测正确, 则含粗差观测的真误差估值明显大于正常观测的真误差估值, 以此可将含粗差的观测区分开来.

假设我们将观测值中的粗差全部找到, 将含粗差的观测值剔除, 剔除粗差后的系数阵为 \check{H}_k .

2.2 Sage 自适应滤波器

对状态方程存在异常的情况, 一般用自适应算法实时估计动态噪声协方差阵 Q_k , 以降低它对参数估计的影响. Sage 自适应滤波器是目前比较常用的^[4].

它是利用状态滤波值 \hat{X}_k 与状态预测值 $\hat{X}_{k,k-1}$ 之差 (称为状态残差) 来估计 Q_k , 记状态残差为 $VX_k = \hat{X}_k - \hat{X}_{k,k-1}$, 利用 k 时刻前 m 个历元的状态残差来自适应估计 Q_k 的公式为

$$Q_k = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} VX_{k-i} VX_{k-i}^T + \Phi_{k,k-1} \Sigma_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T - \Sigma_k, \quad (6)$$

其中 m 为窗口宽度. 求解 Q_k 需要知道 Σ_k , 而求 Σ_k 需要知道 Q_k , 因而(6)式无法求解, 一般用右边第一项来近似代替 Q_k .

2.3 用 UD 滤波计算 X_k 及滤波误差协方差阵

由于滤波递推方程中预报误差的方差阵 $\Sigma_{k,k-1}$ 常常是病态的, 直接对 $\Sigma_{k,k-1}$ 求逆会引起数值计算的不稳定. 为了提高计算的精度, 本文采用了 UD 滤波算法.

首先计算状态预测值 $\hat{X}_{k,k-1}$ 及其协方差阵 $\Sigma_{k,k-1}$ 为

$$\hat{X}_{k,k-1} = \phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1}, \quad (7)$$

$$\Sigma_{k,k-1} = \phi_{k,k-1} \Sigma_{k-1} \phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}. \quad (8)$$

利用 Cholesky 分解将 $\Sigma_{k,k-1}$ 分解成: $\Sigma_{k,k-1} = UDU^T$, 其中 U 为正交阵, D 为对角阵. 预测残差为 $\tilde{V}_k = \tilde{L}_k - \tilde{A}_k \hat{X}_{k,k-1}$, 其方差

$$S_k = \tilde{A}_k \Sigma_{k,k-1} \tilde{A}_k^T + \tilde{R}_k = \tilde{A}_k UDU^T \tilde{A}_k^T + \tilde{R}_k. \quad (9)$$

令: $F = DG$, $G = (\tilde{A}_k U)^T$, 则 Kalman 增益矩阵

$$K_k = UFS_k^{-1}, \quad (10)$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k,k-1} + K_k (\tilde{L}_k - \tilde{A}_k \hat{X}_{k,k-1}), \quad (11)$$

$$\Sigma_k = U(D - FS_k^{-1}F^T)U^T. \quad (12)$$

公式(8)~(11)中, $\tilde{A}_k = (\check{H}_k \ O \ O)$ 为第 k 历元剔除粗差后的设计矩阵, \tilde{L}_k 为第 k 历元不含粗差的观测值, \tilde{R}_k 为不含粗差的观测对应的协方差阵.

2.4 利用预测残差判断滤波是否发散

在实际计算中, 滤波结果并不是每一时刻都发散^[9,12], 我们利用如下判断标准:

$$\tilde{V}_k^T \tilde{V}_k \leq t \times \text{trace}(S_k), \quad (13)$$

式中 t 为可调系数. 如果 $t=6.25$, 相当于 2.5 倍中误差检验. 如果上式满足, 则认为先验值比较准确, 不启动自适应滤波器, 否则, 启动(6)式的 Sage 自适应滤波器估计 k 时刻的动态噪声.

3 算例

以德国波茨坦地学中心 GFZ 提供的 CHAMP 卫星 2001 年 5 月 21 日的力学轨道作为真值, 用 IGS 提供的精密星历经内插后的值作为 GPS 卫星的坐标值, 依此模拟出 CHAMP 卫星上 GPS 接收机该天 24h 的双频伪距值作为真值, 然后再通过一些误差模型模拟出接收机钟差、GPS 卫星钟差、电离层误

差、天线高改正及噪声等综合误差加在观测真值上, 模拟误差分布为 $N(0, 0.25 \text{ m}^2)$. 模拟时, 采样率取 10s, 卫星截止高度角为 0° , 从模拟的 24 h 数据中取 541 个历元的 P 码消电离层组合观测数据

进行定轨计算. 为了检验方案的有效性, 在观测方程中每 50 个历元模拟一个 10m 的粗差, 分别按如下 5 种方案对低轨卫星进行定轨, 定轨结果与模拟真值之差(定轨误差)见图 1~5.

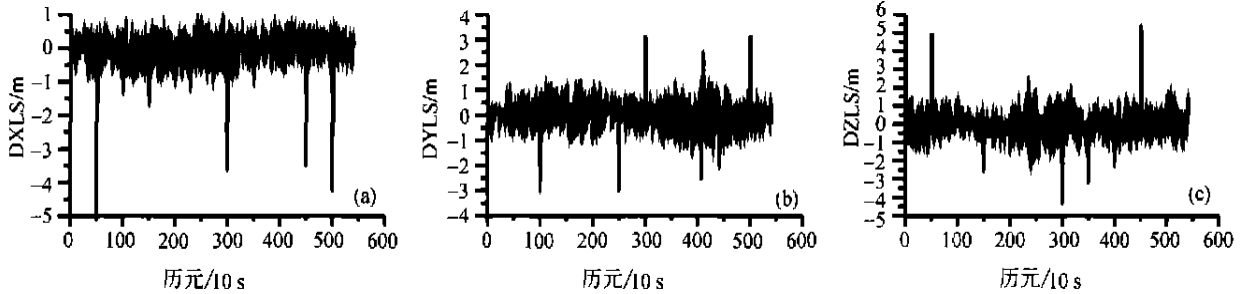


图 1 方案 I 的 X, Y, Z 方向定轨误差

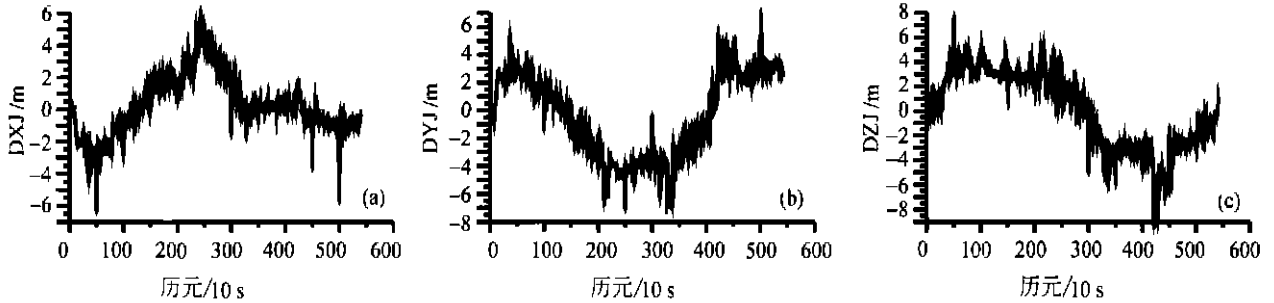


图 2 方案 II 的 X, Y, Z 方向定轨误差

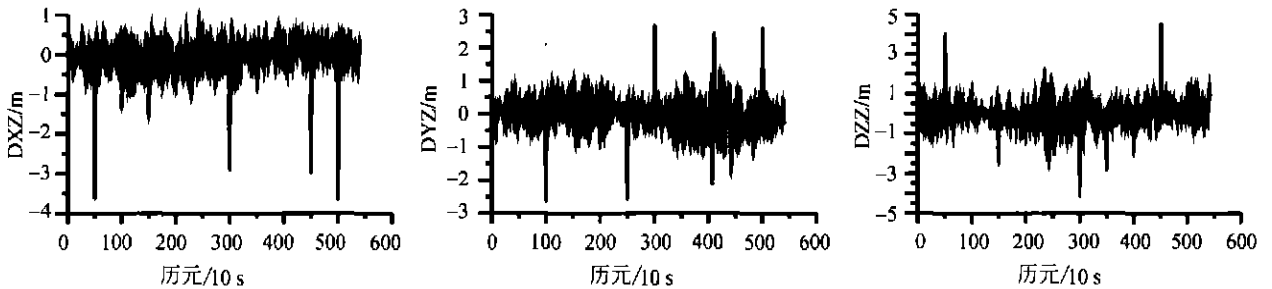


图 3 方案 III 的 X, Y, Z 方向定轨误差

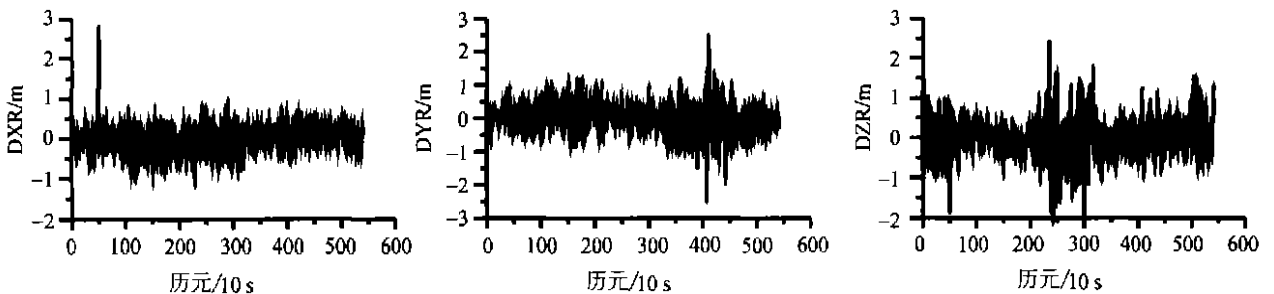


图 4 方案 IV 的 X, Y, Z 方向定轨误差

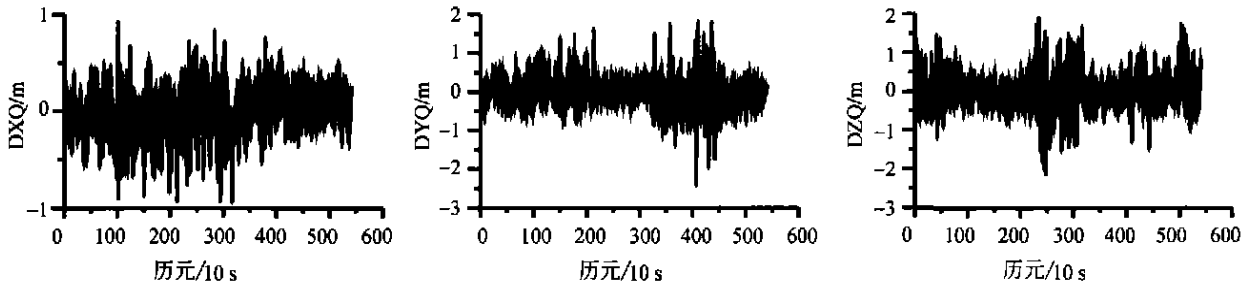


图 5 方案 V 的 X, Y, Z 方向定轨误差

方案 I: 最小二乘估计; 方案 II: 经典 Kalman 滤波; 方案 III: Sage 自适应 UD 滤波^[4]; 方案 IV: Huber 估计+Sage 自适应 UD 滤波; 方案 V: 拟准检定法+Sage 自适应 UD 滤波。

从图 1~5 可看出, 当观测值中含有粗差时, 方案 I 结果比较差, 因为 LS 结果没有抗御粗差的能力。方案 II 结果与方案 I 结果相似, 主要是由于受观测方程中粗差的影响, 自适应估计的状态噪声方差阵和观测噪声方差阵与实际模型精度不匹配造成的。方案 IV 结果比方案 I 结果和方案 II 结果有了较大的改善, 由于 Huber 估计方法能探测到观测中的大部分粗差并对相应观测作了增大方差的处理, 使得观测噪声的方差阵与实际情况比较接近, 在此基础上估计的状态噪声方差阵也比较准确。但个别历元的结果仍比较差, 这是由于误差的牵连效应和抗差权因子不准, 使得相应历元的粗差没有得到完全消除造成的。方案 V 的结果比其余方案的效果都要好, 首先该方案能将模拟的粗差准确定位; 其次该方案的定轨误差比其他方案明显减小。这是由于以观测值真误差为研究对象的拟准检定法不受误差牵连效应的影响, 能将含粗差的观测准确定位, 消除粗差的干扰, 使观测噪声方差比较准确, 在此基础上估计的状态噪声方差与实际状态模型精度比较匹配。方案 II 的结果与实际情况相差很远, 出现发散现象。由于观测方程中存在粗差, 噪声的统计特性不满足条件(3), 因此用经典 Kalman 滤波得到的参数估计已不再是最优估计。

利用 Huber 估计和拟准检定法检测模拟粗差的结果见表 1。

从表 1 可知, 拟准检定法将各历元中模拟的粗差准确定位而 Huber 估计方案除探测到各历元中模

拟的粗差外, 该历元中其他观测也发现了异常, 这主要是因为每个历元多余观测比较少, 系统结构不好, 误差的牵连效应比较严重所致。

表 1 用 Huber 估计和拟准检定法探测模拟粗差的结果^{a)}

模拟粗差	Huber 估计	拟准检定法
50(2)	50(2, 5, 7)	50(2)
100(2)	100(1, 2, 3, 4)	100(2)
150(2)	150(2, 4, 8)	150(2)
200(2)	200(2, 3, 4)	200(2)
250(2)	250(2, 4, 7)	250(2)
300(2)	300(1, 2, 6)	300(2)
350(2)	350(2, 8)	350(2)
400(2)	400(2, 3, 6)	400(2)
450(2)	450(1, 2)	450(2)
500(2)	500(1, 2, 6, 7)	500(2)

a) 差值为 50 的数值序列为历元号, 括号内的数字为粗差在该历元观测值中的编号

本文的算例仅仅是为了比较新方案与其他方案的效果, 模拟粗差比较大。我们还对模拟 5 m 粗差的情况进行了处理, 得到的结论与以上相同。总之, 新方案效果优于以往方案。

4 讨论

(1) 当观测模型中含有粗差时, Sage 自适应滤波结果与 LS 结果都不理想;

(2) Huber 估计+Sage 自适应 UD 滤波结果比 Sage 自适应滤波结果和 LS 结果要好, 但观测模型中的粗差没有完全消除, 有时粗差定位不准;

(3) 本文将拟准检定法与 Sage 自适应 UD 滤波算法结合, 既能较好地消除观测粗差的干扰, 又能削弱状态异常以及数值计算积累误差的影响, 提高状态参数解算的准确性。

以上是以模拟算例来说明拟准检定法在 Kalman 滤波质量控制中的效果, 这对实测动态数据处理具有重要的参考价值, 下一步需要探讨的问题是如何利用新方法对实测 GPS 动态数据进行处理。

参 考 文 献

- 1 Mohinder S et al. Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab (Second Edition), New York: John Wiley & Sons, 2001
- 2 陶本藻. 卡尔曼滤波模型误差的识别. 地壳形变与地震, 1999, 19(4): 15~20
- 3 胡国荣, 等. 改进的高动态 GPS 定位自适应卡尔曼滤波方法. 测绘学报, 1999, 28(4): 290
- 4 徐天河, 等. 改进的 Sage 自适应滤波方法. 测绘科学, 2000, 25(3): 22
- 5 张金槐. 线性模型参数估计及其改进. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999
- 6 Teunissen P J G. Quality control in integrated navigation system. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 1990, 5(7): 35
- 7 Yang Y, et al. A new adaptively robust filtering for kinematic geodetic positioning. Journal of Geodesy, 2001, 75(2): 109
- 8 Jikun O U. A new method of identifying and locating gross errors—quasi-accurate detection. Chinese Sciences Bulletin, 1999, 44(10): 1777
- 9 宋文尧. 卡尔曼滤波. 北京: 科学出版社, 1991

厦门大学在新型富勒烯研究方面取得重要成果

以厦门大学物理化学固体表面化学国家重点实验室为主完成的有关新型富勒烯 $C_{50}Cl_{10}$ 的合成与表征研究工作发表在《Science》(2004 年 4 月 30 日)杂志上后, 在国际学术界迅速引起重大反响. 美国的《New Scientist》, 《Chemical & Engineering》杂志及英国的《PhysicsWeb》等国际科技媒体, 分别以“Baby buckyballs hold unusual promise”、“Chlorine catches cagey C_{50} ”、“Carbon-50 makes its debut”等为题, 报道和评述了这项在国家自然科学基金等长期持续资助下取得的重要成果。

以郑兰荪教授为学术带头人的厦门大学固体表面物理化学国家重点实验室原子团簇科学研究组, 自 20 世纪 80 年代就开始了团簇的激光产生与研究. 郑兰荪、黄荣彬教授研制了多台原位产生和研究原子团簇的大型仪器, 并带动国内该领域研究的开展. 进入 90 年代中期, 他们又根据学科的发展, 开展了新型团簇的宏量制备, 建立了液相电弧、辉光放电、微波等离子体等合成方法, 合成、分离并表征了 $C_{20}Cl_{10}$ 等一系列氯代碳簇结构. 该研究组的谢素原博士在攻读博士期间就已参加氯代碳簇的合成研究并取得突出成绩, 5 年前又合成和通过色谱—质谱联用检测到了 $C_{50}Cl_{10}$, 进一步对合成与分离条件加以优化, 通过在商业化制备 C_{60} 的石墨电弧方法的氦气气氛中引入四氯化碳作为氯源, 以此捕获和稳定 C_{50} 分子. 在他们的指导下, 博士生高飞历经 3 年艰辛的努力, 最终合成了约 100 g 产物. 用高效液相色谱进行多轮制备分离, 最后一轮的纯化工作得到了中国科学院化学研究所王春儒研究员的大力协助, 采用专用的 C_{60} 分离设备, 最终分离出近 1 mg 的 $C_{50}Cl_{10}$. 获得纯化的产物后, 在中国科学院武汉物理与数学研究所刘买利、张许等人的鼎力帮助下, 采用核磁共振(NMR)仪器, 历经 15 天 27000 余次的累加, 测定了它的 ^{13}C NMR 谱. 与此同时, 进一步发挥厦门大学固体表面物理化学实验室多学科的综合优势, 由实验室吕鑫教授对该新型富勒烯的多种可能结构与 ^{13}C NMR 谱作了理论计算, 结合实验测试结果最终确定该富勒烯衍生物具有 D_{5h} 对称的笼状结构, 其中 10 个相邻五元环上的 10 个碳原子由 sp^2 转成 sp^3 杂化, 其多余的化学键由 10 个氯原子所饱和.

初步的研究还发现 $C_{50}Cl_{10}$ 的氯原子很容易被取代, 由此可以定向地衍生出丰富的新型富勒烯化合物. 可以预计, 应用该文所介绍的合成思路与方法, 其他小于 C_{60} 的富勒烯分子也将可能被一一合成出来, 并展示种种奇异的结构与性质; 而键合在特定位置上的氯原子, 使得它们的衍生化能够定向地进行, 为合成更为丰富和特定功能的化合物提供了基础.

(杨俊林 陈 荣)